OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG

INFORMATIK UND MATHEMATIK

# Armutsquotenberechnung

# aus gerundeten Einkommensangaben

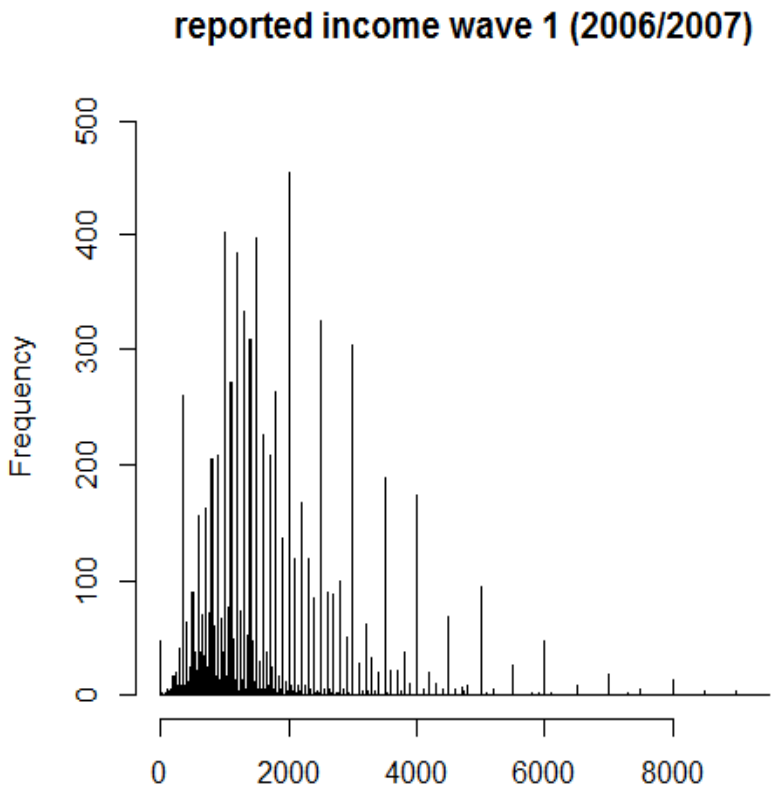
Jörg Drechsler, IAB Nürnberg

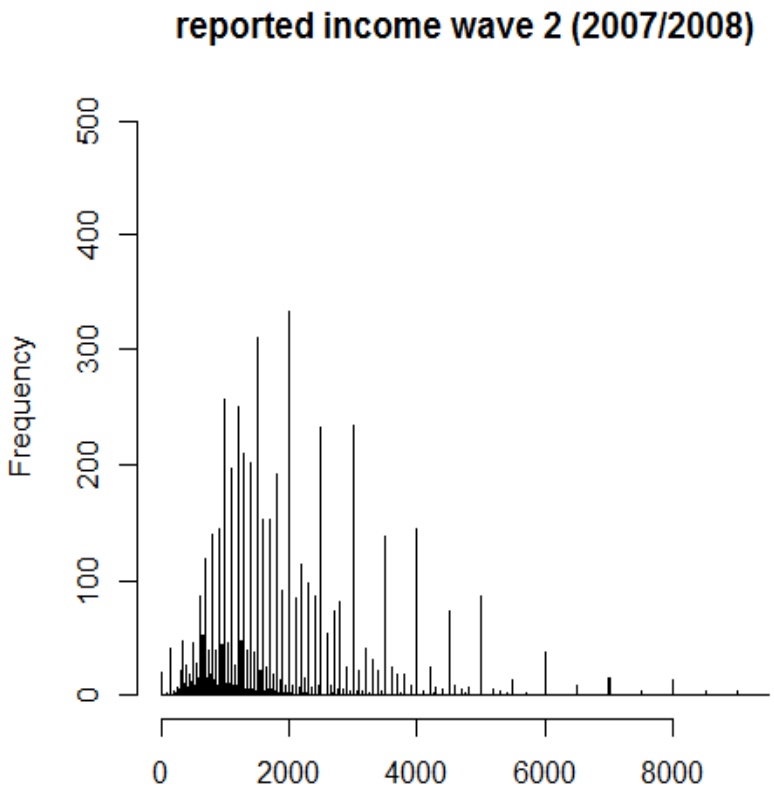
Hans Kiesl, OTH Regensburg

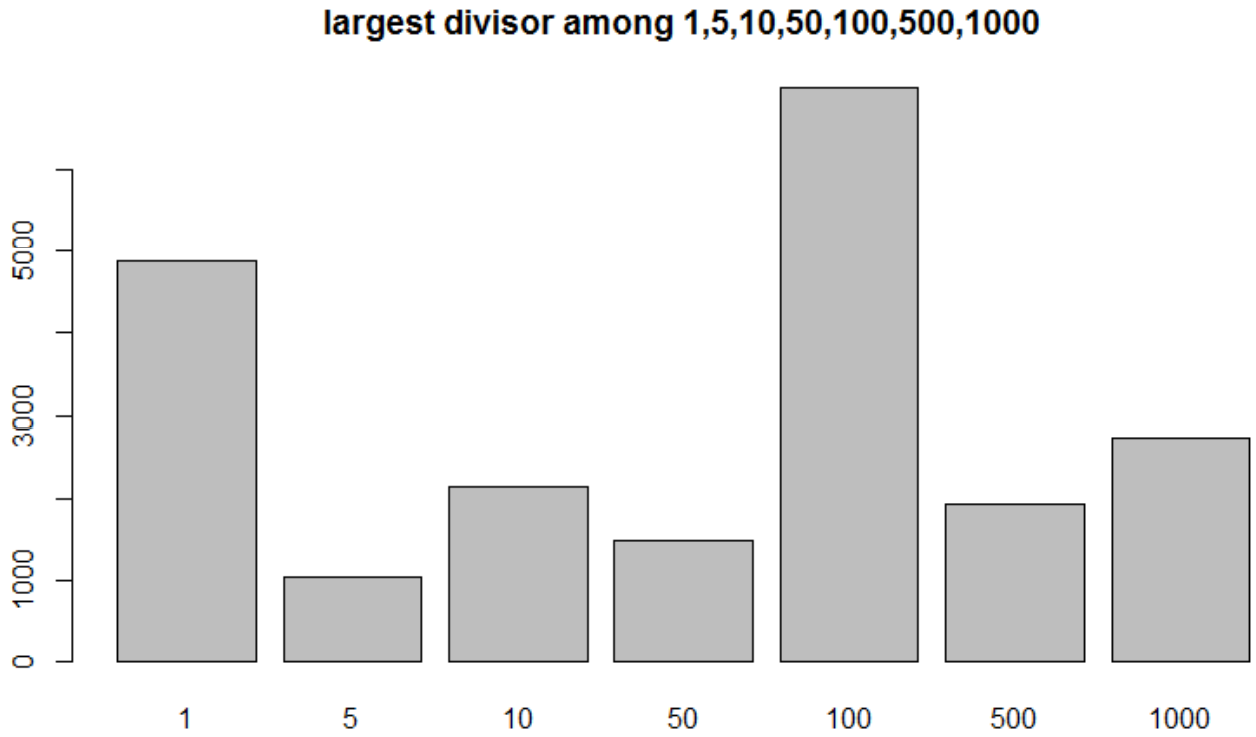
Statistik-Tage Bamberg|Fürth 2016

20.7.2016

# Panelerhebung PASS (Panel Arbeitsmarkt und soziale Sicherung)






Kein rein deutsches Problem:

Czajka und Denmead (2008): im CPS und im ACS geben 30% ein Jahreseinkommen an, das durch $5000 teilbar ist, 17 % geben ein Einkommen an, das durch $10000 teilbar ist

## Heaping tritt in vielen Anwendungen auf:

- Alter von Kleinkindern (Heitjan und Rubin 1990)
- Zigarettenkonsum (Wang und Heitjan 2008)
- Arbeitslosigkeitsdauer (Wolff und Augustin 2003, van der Laan und Kuijvenhoven 2011)
- Blutdruck (de Lusignan et al. 2004)
- Anzahl der Sexualpartner (Roberts und Brewer 2001)

# Heaping beim Einkommen: warum ist das ein Problem?

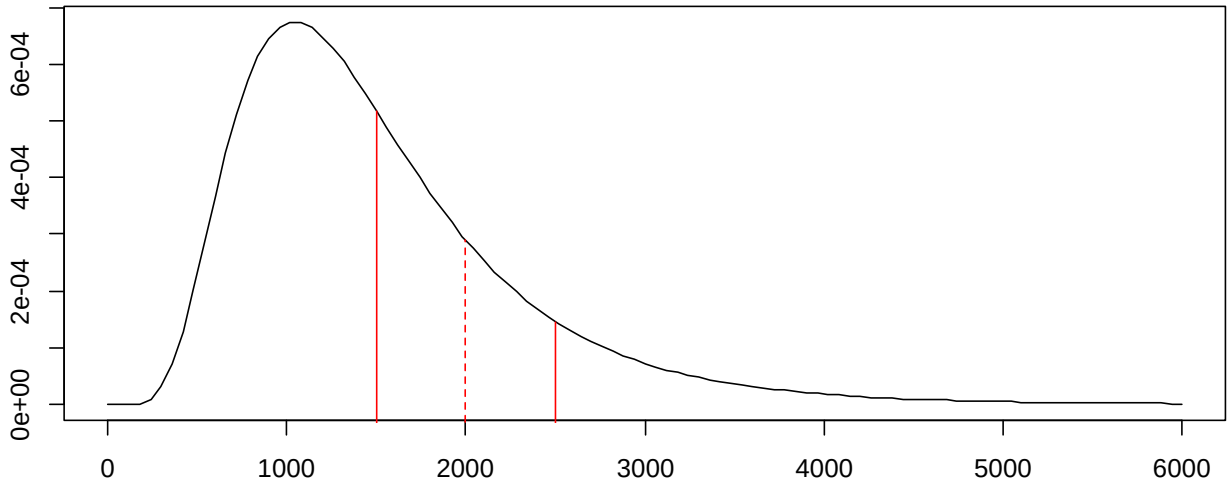
- Heaping verändert die Verteilung
- Verzerrung bei fast jeder Schätzfunktion
- also auch bei der Armutsgefährdungsquote

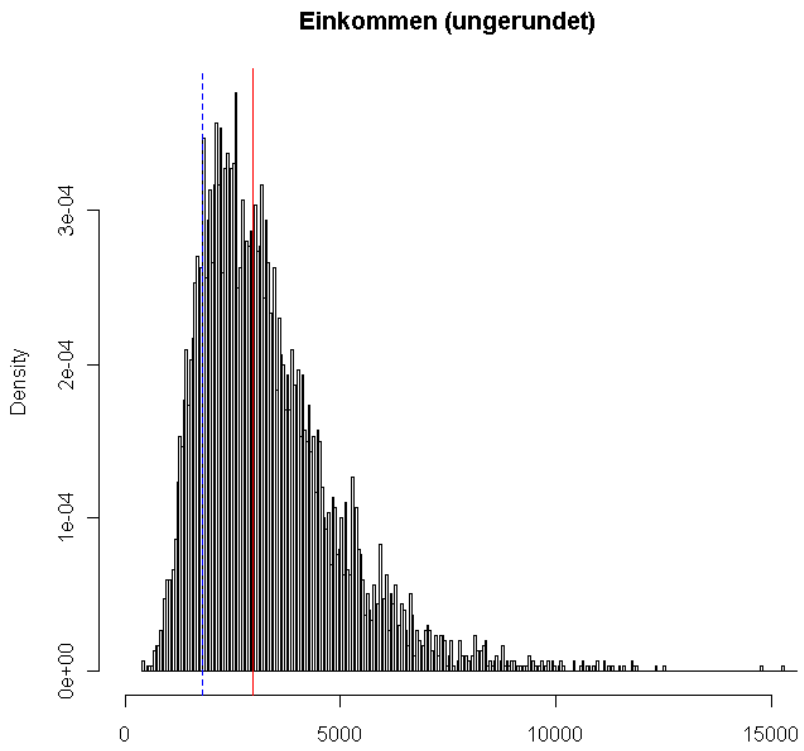
# Aber zumindest für Mittelwerte ist das doch kein Problem?

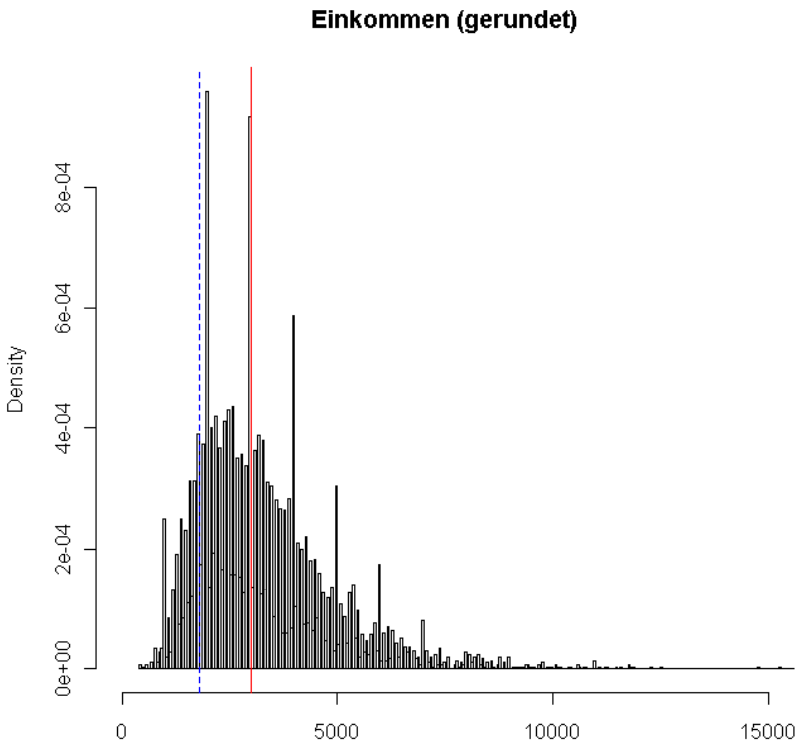
- Typisches Messfehlermodell:

$$y_i^{\text{obs}} = y_i + \epsilon_i, \quad \mathrm{E}(\epsilon_i) = 0$$

- Runden ist etwas anderes:



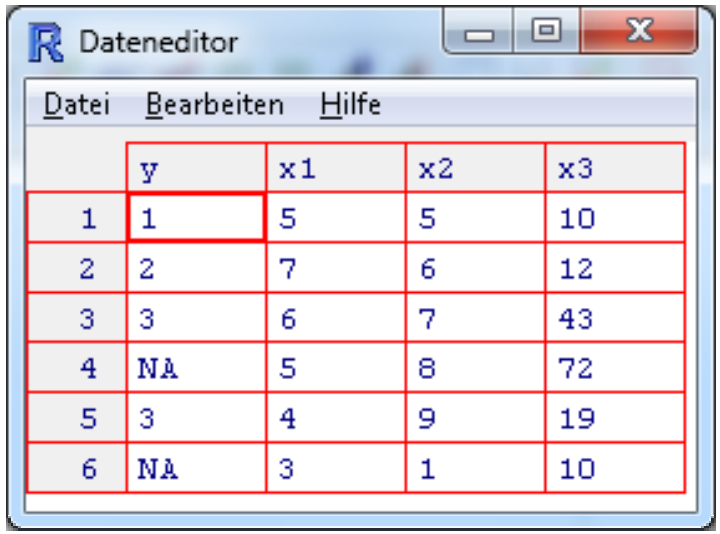



Armutsgrenze: 1784,73 Armutsquote: 14,12%

Armutsgrenze: 1800,00 Armutsquote: 13,00%

# Exkurs: Imputation state-of-the-art




| | y | x1 | x2 | x3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 5 | 10 |
| 2 | 2 | 7 | 6 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 7 | 43 |
| 4 | NA | 5 | 8 | 72 |
| 5 | 3 | 4 | 9 | 19 |
| 6 | NA | 3 | 1 | 10 |

- Bestimmte bedingte Verteilung von $Y_{miss}$ gegeben **X** = (X1, X2, X3,…) und $Y_{obs}$
- Dazu übliches Vorgehen: postuliere parametrisches Verteilungsmodell für Y gegeben **X** mit Parameter(vektor) $\theta$

Für bedingte Dichte von $Y_{miss}$ gegeben $\mathbf{X}$ und $Y_{obs}$ gilt:

$$f(y_{miss}|\mathbf{x}, y_{obs}) = \int f(y_{miss}|\mathbf{x}, y_{obs}, \theta) \cdot f(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})\, d\theta$$

Daraus ergibt sich zweistufiges Vorgehen zum Ziehen von Werten aus der bedingten Verteilung von $Y_{miss}$:

(1) Ziehe $\theta^*$ mit Dichte $f(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})$

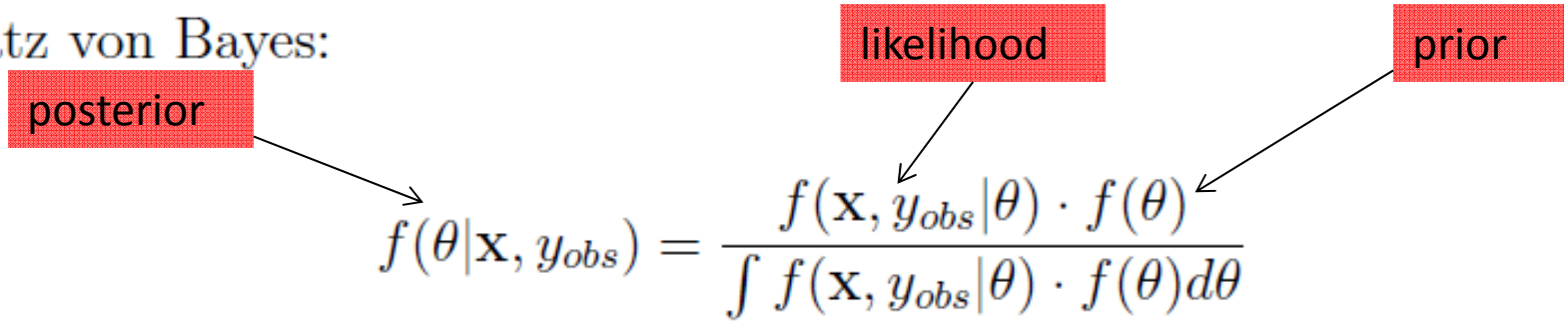
i.A. nicht so leicht

(2) Ziehe $Y$ mit Dichte $f(y|\mathbf{x}, y_{obs}, \theta^*)$

leicht

Wie zieht man $\theta^*$ mit Dichte $f(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})$?

Satz von Bayes:




Sampling Importance Resampling (SIR):

(1) Gegeben sei eine Dichte $g(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})$, die als Näherung für $f(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})$ dient.

(2) Ziehe $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, ..., \theta_n^*$ mit Dichte $g(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})$.

(3) Ziehe aus diesen $\theta_i^*$ mit Wahrscheinlichkeiten, die proportional sind zu $\frac{f(\theta_i^*|\mathbf{x}, y_{obs})}{g(\theta_i^*|\mathbf{x}, y_{obs})}$.

# Die kanonische MI-Folie

(1) Ziehe $\theta^*$ mit Dichte $f(\theta|\mathbf{x}, y_{obs})$

(2) Ziehe $Y$ mit Dichte $f(y|\mathbf{x}, y_{obs}, \theta^*)$

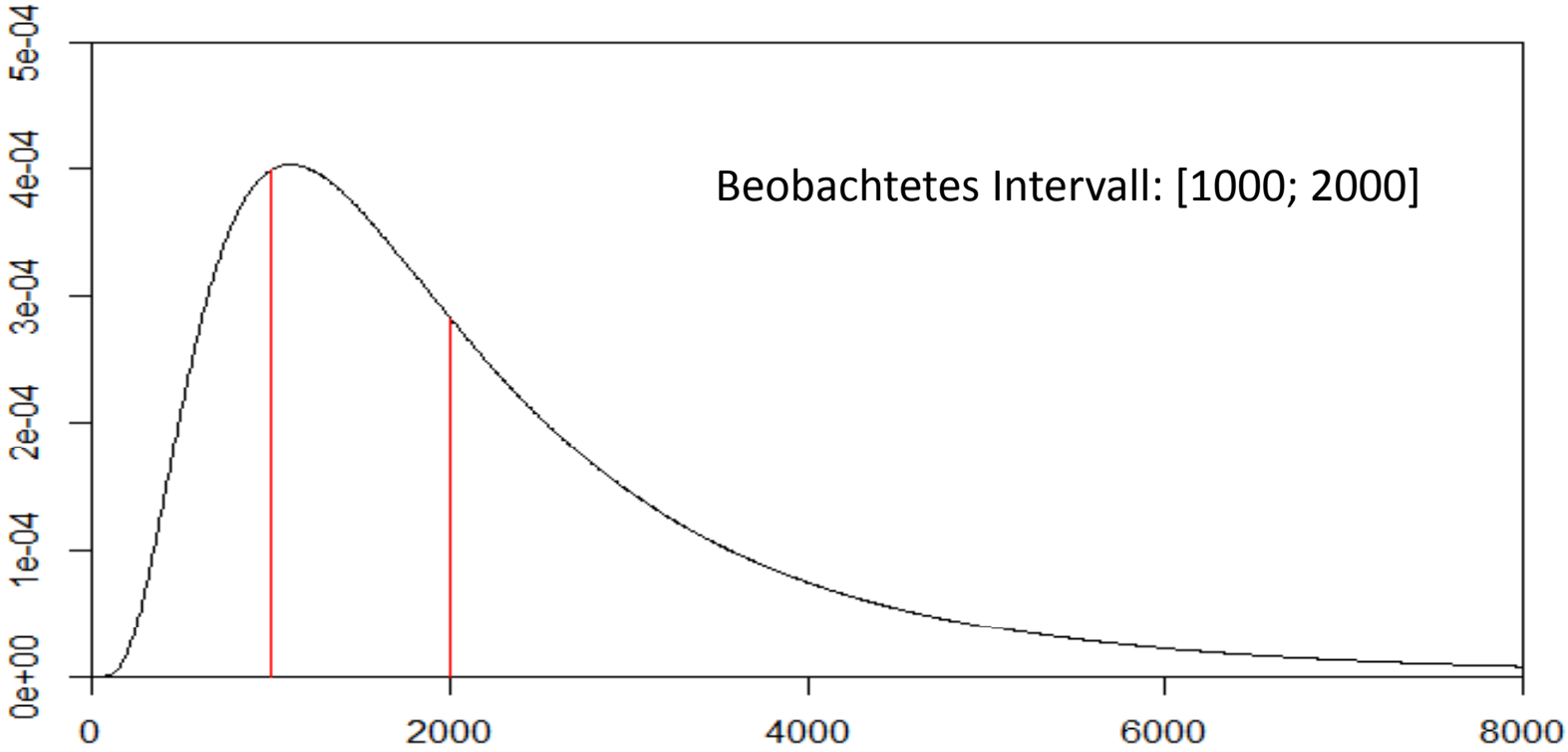
(3) Wiederhole das $m$-mal, so dass für jeden fehlenden Wert $m$ Imputationen vorliegen; erstelle daraus $m$ komplettierte Datensätze.

(4) Sei $\alpha$ ein zu schätzender Parameter, sei $\hat{\alpha}$ eine Schätzfunktion für $\alpha$ mit (geschätzter) Varianz $\hat{\sigma}^2_\alpha$. Berechne die Schätzfunktion (und die Varianzschätzung) aus jedem der $m$ Datensätze und kombiniere die Ergebnisse wie folgt:

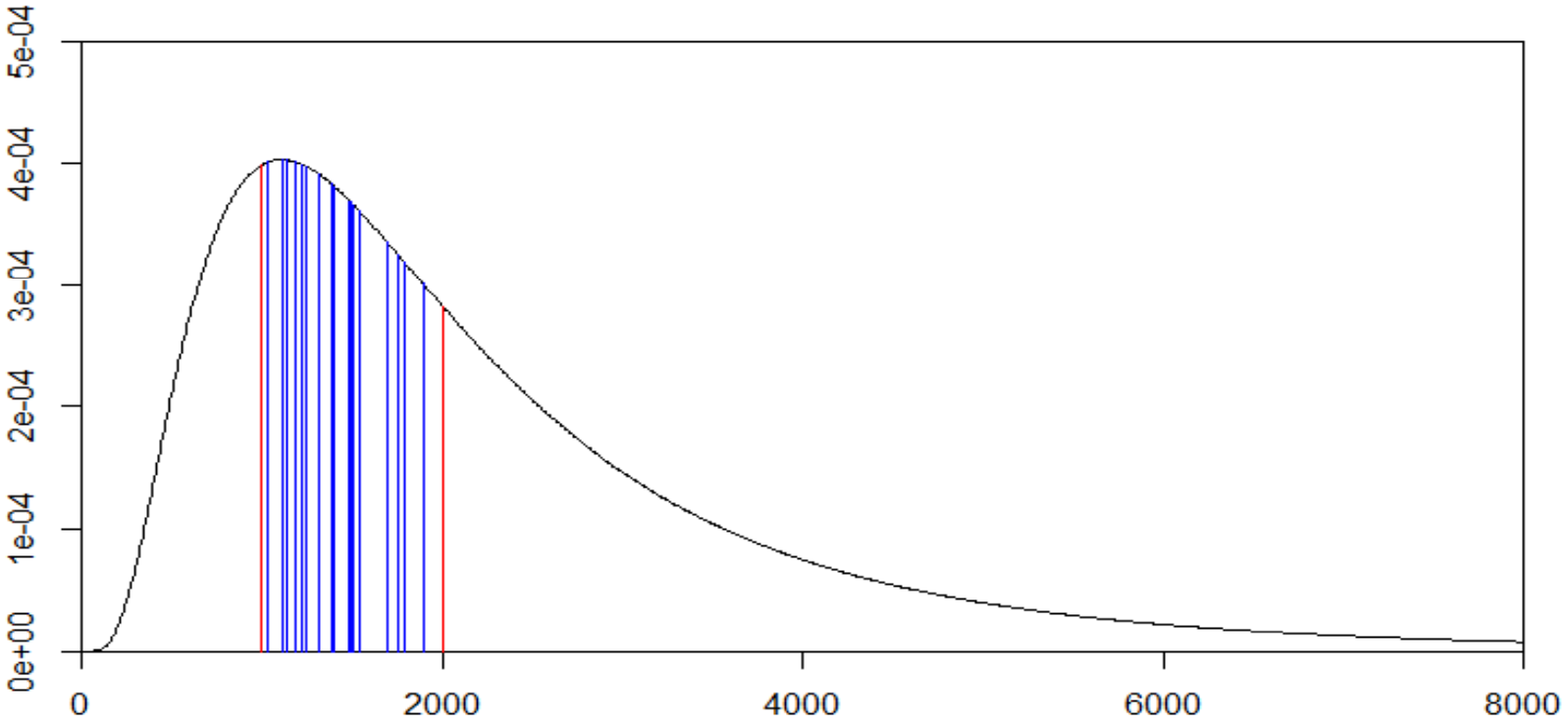
$$\hat{\alpha}_{MI} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\alpha}_i$$

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha_{MI}} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}^2_{\alpha_i} + \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\hat{\alpha}_i - \bar{\hat{\alpha}})^2$$

# Imputation bei Intervalldaten



# Imputation bei Intervalldaten



# Imputation bei Intervalldaten: Details

- Modell für logarithmiertes Einkommen :

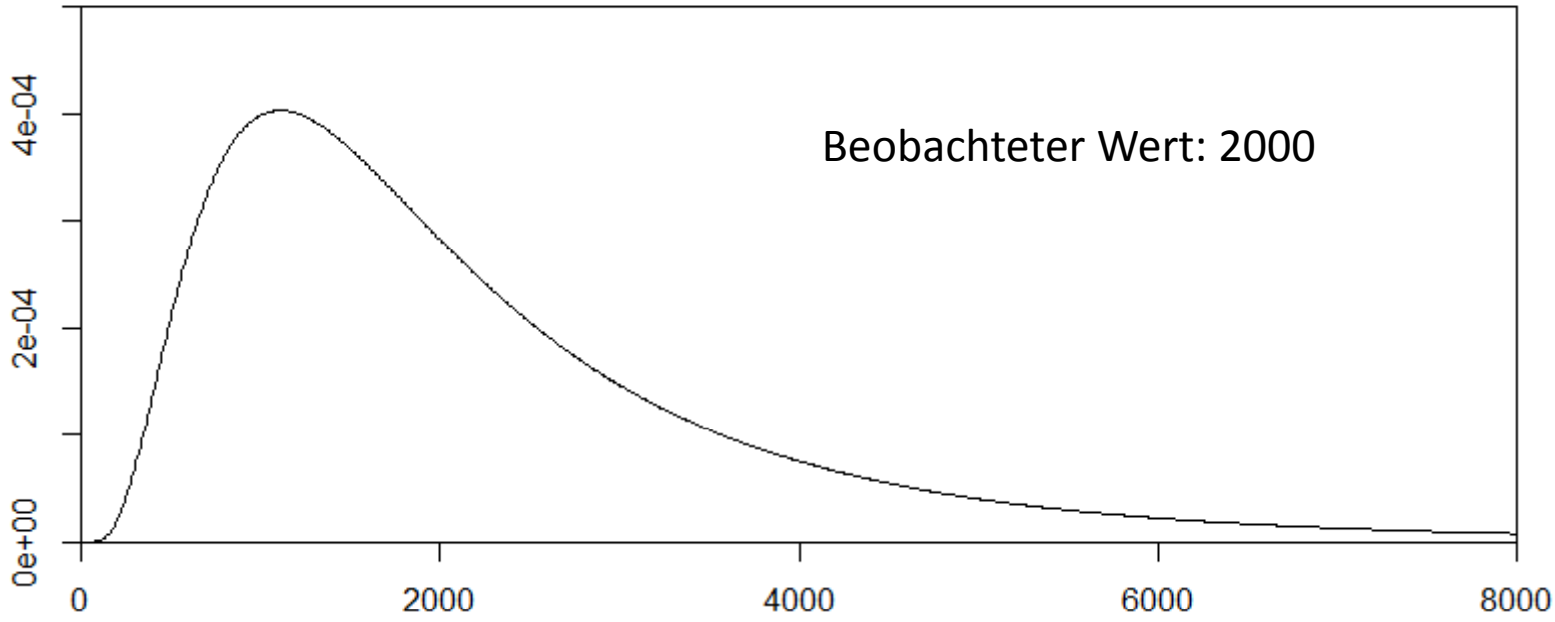
$$\ln(inc_i)|\mathbf{x}_i \sim N(\beta_0 + \beta_1'\mathbf{x}_i, \sigma^2)$$

- Likelihood:

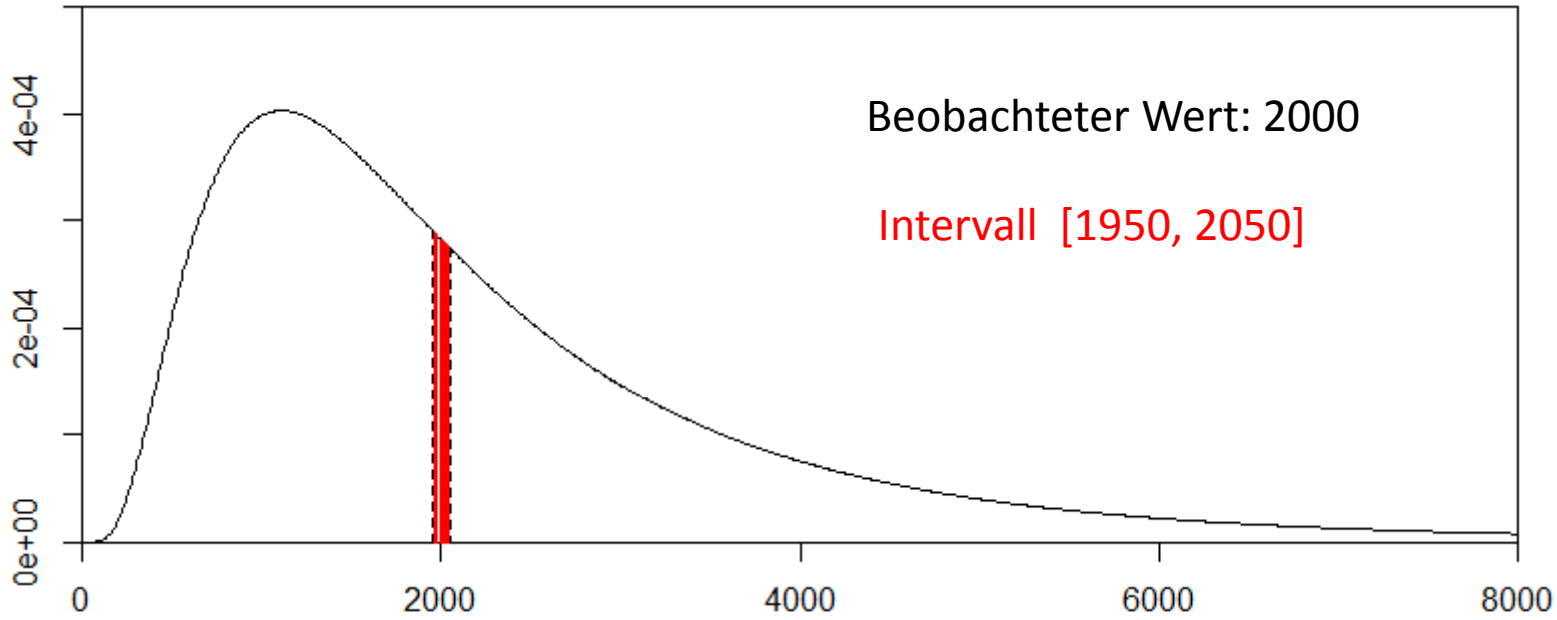
$$\begin{aligned} L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2|s_i, \mathbf{x}_i) &= \prod_i \left(F_{\ln(inc)}(ln(o_i)|\mathbf{x_i}) - F_{\ln(inc)}(ln(u_i)|\mathbf{x_i})\right) \\ &= \prod_i \int_{A(s_i)} f_{\ln(inc)}(y|\mathbf{x_i})dy \end{aligned}$$

wobei $A(s_i)$ die Menge der (logarithmierten) Einkommenswerte sind, die zum beobachteten Intervall passen.

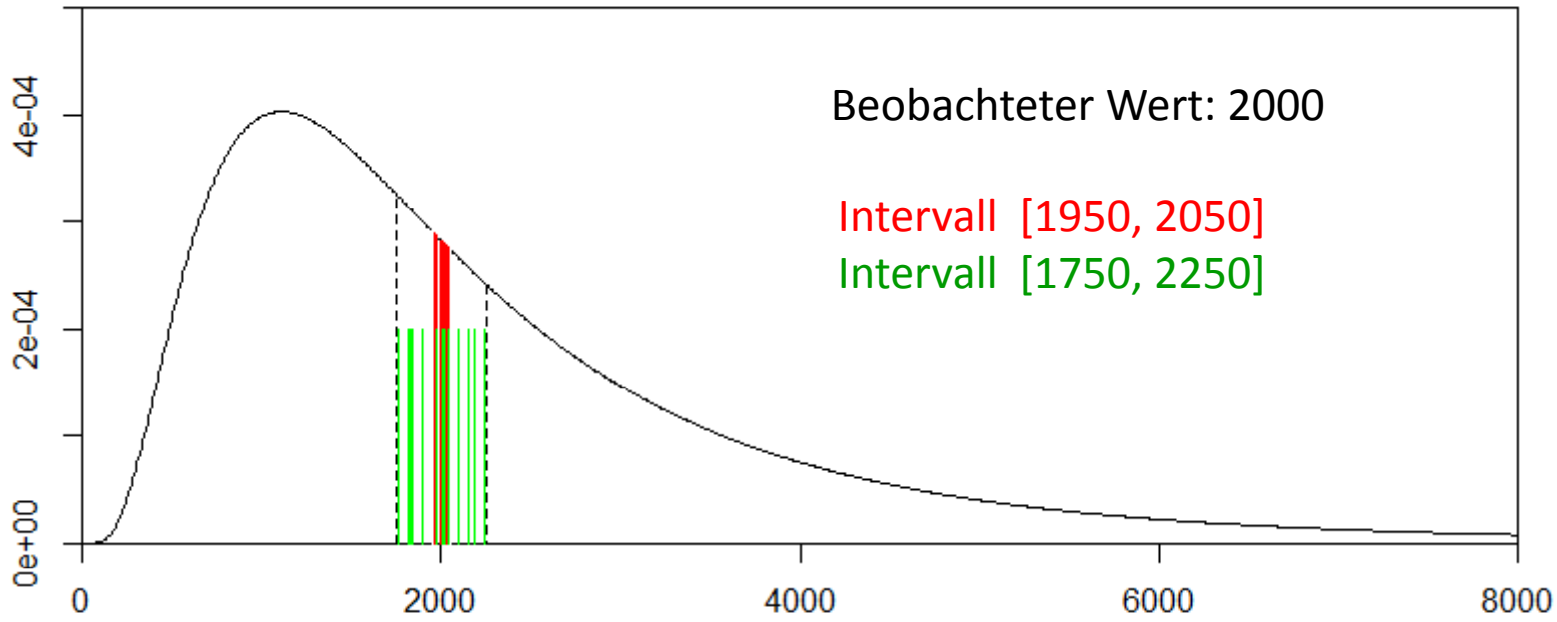
# Heaping: „so ähnlich“ wie Intervalldaten



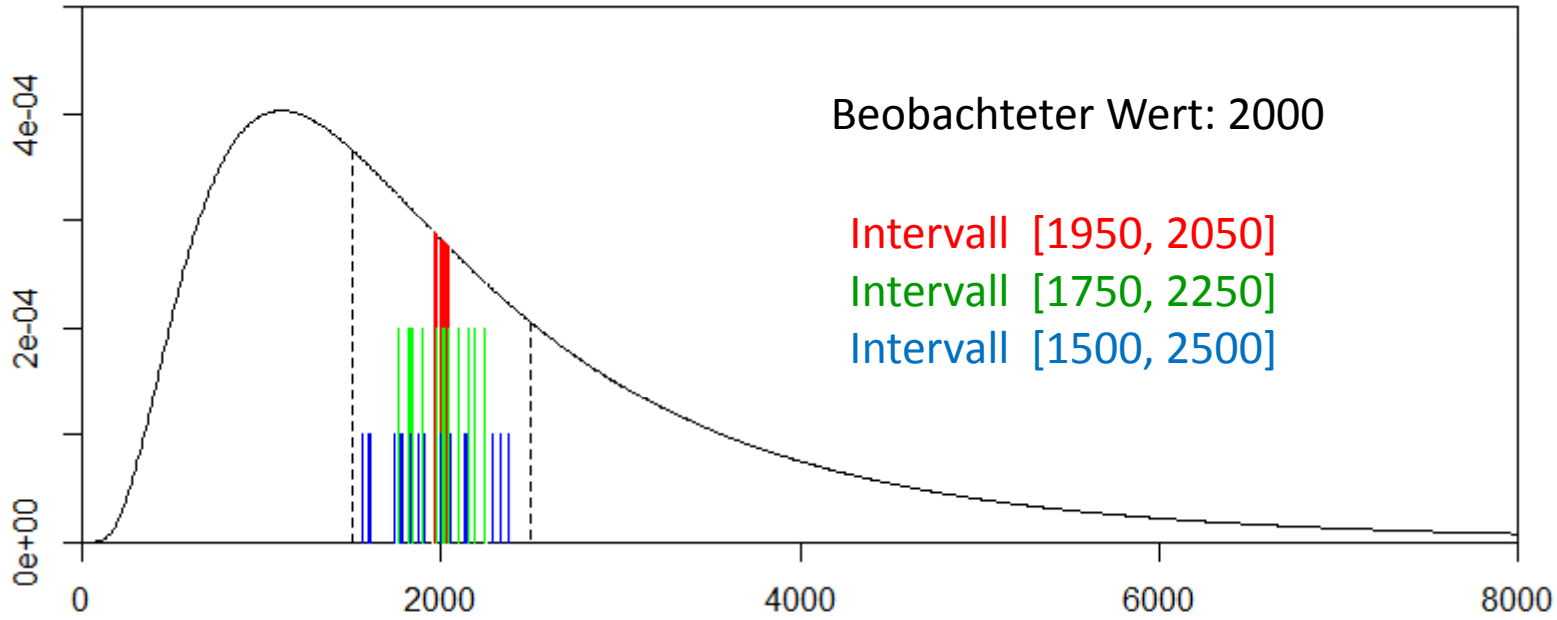
# Heaping: „so ähnlich“ wie Intervalldaten



# Heaping: „so ähnlich“ wie Intervalldaten



# Heaping: „so ähnlich“ wie Intervalldaten



# Heaping: technische Details

- Modell für logarithmiertes Einkommen:

$$\ln(inc_i)|\mathbf{x}_i \sim N(\beta_0 + \beta_1'\mathbf{x}_i, \sigma^2)$$

Kovariablenvektor x:

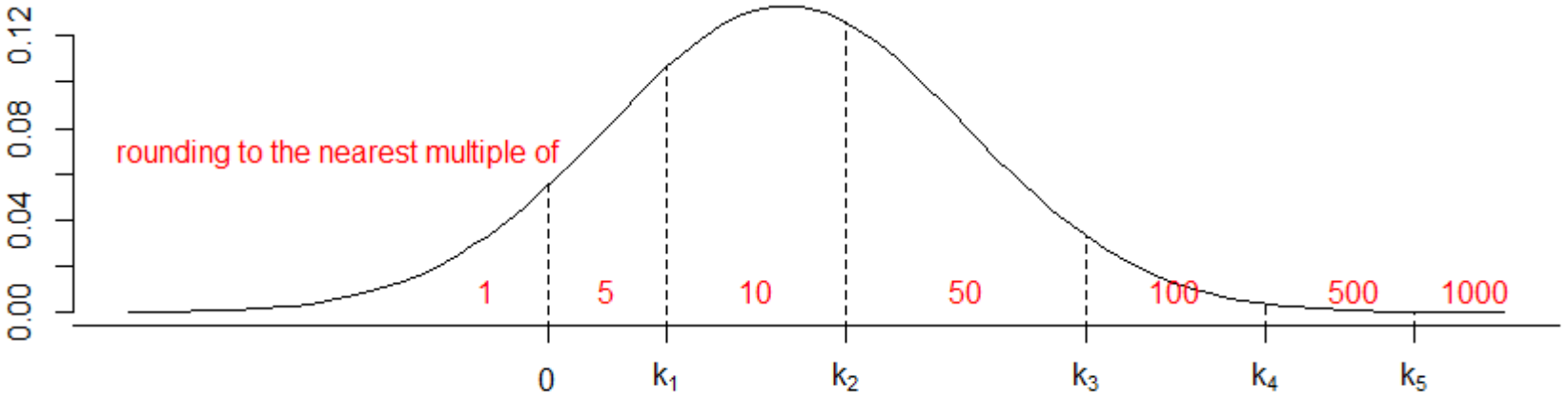
Haushaltsgröße, Kinderzahl, Erwerbsstatus, Alter, Beruf, Bildungsstand, Staatsangehörigkeit, Transferempfänger (ja/nein), Vermögen, Größe der Wohnung/des Hauses

(Ziel ist Vorhersage, keine kausale Interpretation der Parameter, daher ist uns Endogenität egal)

# Heaping: technische Details

- Modell für das Rundungsverhalten (ordered probit model)

$$g \mid \ln(inc_i), \mathbf{z}_i \sim N(\alpha_0 + \alpha_1 \ln(inc_i) + \alpha_2' \mathbf{z}_i, 1)$$



# Heaping: technische Details

- Parametervektor $\Psi = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$

- Likelihood:

$$
\begin{aligned}
L(\Psi|s,x,z) &= \prod_i f(s_i, x_i, z_i|\Psi) \\
&= \prod_i f(x_i, z_i) \cdot \prod_i f(s_i|x_i, z_i, \Psi) \\
&\propto \prod_i \iint_{A(s_i)} f(g, \log(y)|x_i, z_i, \Psi) d\log(y) dg.
\end{aligned}
$$

## Beispiel

- Beobachtetes Einkommen = 850
- gerundet auf die nächstliegenden 1,5,10 oder 50 Euro
- Beitrag zur Likelihood:

$$
\begin{aligned}
f(s_i|x_i, z_i, \Psi) &= \int_{-\infty}^{0} \int_{\log(849.5)}^{\log(850.5)} f(g,\ \log(y)|x_i, z_i, \Psi) d\log(y) dg + \\
&+ \int_{0}^{k_1} \int_{\log(847.5)}^{\log(852.5)} f(g, \log(y)|x_i, z_i, \Psi) d\log(y) dg + \\
&+ \int_{k_1}^{k_2} \int_{\log(845)}^{\log(855)} f(g, \log(y)|x_i, z_i, \Psi) d\log(y) dg + \\
&+ \int_{k_2}^{k_3} \int_{\log(825)}^{\log(875)} f(g, \log(y)|x_i, z_i, \Psi) d\log(y) dg.
\end{aligned}
$$

## Imputation

- Bestimme ML-Schätzer für die Parameter des gemeinsames Modells für Einkommen und Rundungsverhalten
  - Optimierung einer mehrdimensionalen Funktion (15-20 Parameter), die hochgradig nicht-trivial ist
  - Nelder-Mead hat bei uns (in einer Simulation) am besten abgeschnitten (gegenüber Quasi-Newton-Verfahren)

- Bayesianisches Vorgehen:
  - Posterior ist proportional zu Likelihood mal Prior
  - Wir nehmen „improper priors“ an, d.h. Posterior ist proportional zur Likelihood
  - Zunächst Approximation der Posterior durch multivariate Normalverteilung, deren Modus (Mittelwert) gleich dem ML-Schätzer ist (Kovarianz: inverse Fisher-Information), dann SIR

# Imputation

- Mit gegebenen Parameterwerten wird durch rejection sampling imputiert:
  1) Ziehe Werte für (log(inc), *g*) aus einer bivariaten Normalverteilung.
  2) Akzeptiere Wert, wenn das gezogene Einkommen, der gezogene Rundungsindikator und das beobachtete (gerundete) Einkommen zueinander passen.
  3) Ansonsten gehe zu 1).

- Das alles wird m-mal wiederholt (z.B. m=10), so dass m imputierte Datensätze entstehen.

## Ergebnisse PASS Armutsgefährdungsquote

| Welle | $n_{obs}$ | $n_{imp}$ | Originaldaten | Rundungskorrektur | Rundungs- und Nonresponsekorrektur |
|---|---|---|---|---|---|
| Welle 1 | 10,214 | 12,791 | 17.29<br>(15.81;18.77) | 16.35<br>(15.14;17.55) | 16.60<br>(15.48;17.71) |
| Welle 2 | 7,311 | 8,428 | 16.91<br>(15.79;18.03) | 16.98<br>(15.69;18.27) | 16.39<br>(15.15;17.63) |
| Welle 3 | 8,169 | 9,534 | 14.27<br>(12.28;16.27) | 15.40<br>(13.91;16.90) | 15.66<br>(14.35;16.97) |
| Welle 4 | 6,538 | 7,845 | 14.89<br>(13.44;16.35) | 14.61<br>(13.40;15.81) | 14.81<br>(13.61;16.02) |
| Welle 5 | 8,623 | 10,232 | 16.34<br>(14.81;17.87) | 15.75<br>(14.41;17.10) | 15.82<br>(14.35;17.29) |
| Welle 6 | 8,267 | 9,508 | 15.95<br>(14.49;17.42) | 16.27<br>(14.81;17.72) | 15.78<br>(14.47;17.09) |

- Veränderung um bis zu 1.4 Prozentpunkte (Welle 3)
- Rundungseffekt stärker als Nonresponse-Effekt
- Armutsquote nach Korrektur stabiler

## Zusammenfassung

- Nonresponse und Rundung bei Einkommensangaben können zu Verzerrungen führen
- Imputation kann helfen, Verzerrungen zu vermeiden
- beliebige Analysen nach Imputation möglich
- Modellannahmen müssen sorgfältig überprüft werden
- Rundung unter Umständen nicht der einzige Messfehler
- andere Arten von Messfehlern werden (bisher) nicht korrigiert